

DIE BERECHNUNG DER GRENZSCHICHTEN FÜR GEKOPPELTEN WÄRMEÜBERGANG UND STOFFAUSTAUSCH BEI VERDUNSTUNG EINES FLÜSSIGKEITSFILMS ÜBER EINER PARALLEL ANGESTRÖMTEN PLATTE UNTER BERÜCKSICHTIGUNG VERÄNDERLICHER STOFFWERTE

FRITZ EISFELD

Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt e. V. Forschungszentrum Braunschweig,
33 Braunschweig, Germany

(Received 9 June 1970)

Zusammenfassung—Für eine parallel angeströmte ebene Platte, auf der sich ein dünner Flüssigkeitsfilm befindet, der verdunstet, werden die Gleichungen der Impuls-, Konzentrations- und Energiegrenzschicht für laminare Strömung angegeben. Es wird das Verfahren der ähnlichen Lösungen benutzt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Platte wärmeundurchlässig ist, die Gastemperatur so niedrig liegt, dass die Thermodiffusion vernachlässigt werden kann und dass die Strömungsgeschwindigkeit so klein ist, dass die Dissipation unbedeutend ist. Ausserdem wird sich beschränkt auf die Verdunstung von Stoffen, für die das Verhältnis (α/σ) der Wärmeübergangszahl zur Verdunstungszahl konstant ist. Zunächst wird der Fall der konstanten Stoffeigenschaften behandelt. Sodann werden die veränderlichen Stoffwerte berücksichtigt und Gleichungen für die Eigenschaften des Gemisches angegeben. Ausgegangen wird dabei von Tabellenwerten beziehungsweise entsprechenden Ausgleichspolynomen für reine Stoffe. Anhand von einem Beispiel wird gezeigt, wie weit sich die veränderlichen Stoffeigenschaften im Vergleich zur Annahme konstanter Stoffwerte auswirken. Schliesslich wird die nach den angegebenen Gleichungen ermittelte Abhängigkeit der Temperatur T_0 von T_∞ mit nach anderen Methoden berechneten Werten und Messergebnissen verglichen.

BEZEICHNUNGEN		
A ,	Austauschverhältnis Gleichung (45) [kcal/kg grd];	$f_{2*}(\Omega)$, Hilfsfunktion Gleichung (64); $f_{1*}(\theta)$, Hilfsfunktion Gleichung (56);
c ,	Massenkonzentration bez. auf Gesamtmasse;	$f_{2*}(\theta)$, Hilfsfunktion Gleichung (57); $f_{3*}(\theta)$, Hilfsfunktion Gleichung (58);
c_p ,	spezifische Wärme bei konstantem Druck [kcal/kg grd];	$f_{4*}(\theta)$, Hilfsfunktion Gleichung (65); $f_{5*}(\theta)$, Hilfsfunktion Gleichung (66);
D_{12} ,	Diffusionskoeffizient der molekularen Diffusion [m ² /s];	g , Erdbeschleunigung [m/s ²]; h , Enthalpie [kcal/kg];
D_T ,	Diffusionskoeffizient der Thermo- diffusion [m ² /s];	h' , Enthalpie der Flüssigkeit [kcal/kg]; h'' , Enthalpie des Dampfes bzw. Gases [kcal/kg];
$f(\eta)$,	Stromfunktion Gleichung (6) verein- facht f für $f(\eta)$;	K_{1*} , Konstante Gleichung (49) [kcal/kg]; K_{12} , Konstante Gleichung (54);
f_0 ,	Stromfunktion an Stelle $\eta = 0$ Gleichung (24);	Le , Lewiszahl $Le = Sc/Pr$;
$f_{1*}(\Omega)$,	Hilfsfunktion Gleichung (53);	M , Molekulargewicht [kg/kmol]; \dot{m} , Stoffstrom [kg/m ² s];

p ,	Gesamtdruck [kp/m ²];	∞ ,	bezogen auf die ungestörte Strömung;
Pr ,	Prandtl-Zahl Gleichung (22);	1,	Stoff 1;
q ,	Wärmestrom je Flächeneinheit [kcal/m ² h];	2,	Stoff 2.
q_r ,	Strahlungswärme je Flächeneinheit [kcal/m ² h];		
Sc ,	Schmidt-Zahl Gleichung (20);		
T ,	Temperatur [°K];		
u ,	Geschwindigkeit in x -Richtung [m/s];		
v ,	Geschwindigkeit in y -Richtung [m/s];		
x ,	Koordinate parallel zur Plattenoberfläche [m];		
x_1, x_2 ,	Konzentration bezogen auf das Volumen;		
y ,	Koordinate senkrecht zur Plattenoberfläche [m];		
z ,	$\int_0^y \rho/\rho_\infty dy$ [m];		
α ,	Wärmeübergangszahl [kcal/m ² h grad];		
δ ,	Grenzschichtdicke [m];		
$\zeta(\eta)$,	Koeffizient Gleichung (41);		
$\zeta^*(\eta)$,	Koeffizient Gleichung (42);		
η ,	Ähnlichkeitsparameter Gleichung (6);		
$\theta(\eta)$,	Ähnlichkeitsparameter der Energiegl. Gleichung (10);		
λ ,	Wärmeleitfähigkeit [kcal/m h grad];		
μ ,	dynamische Zähigkeit [kg s/m ²];		
ν ,	kinematische Zähigkeit [m ² /s];		
$\xi(\eta)$,	Koeffizient Gleichung (39);		
ρ ,	Dichte [kg/m ³];		
σ ,	Verdunstungszahl [kg/m ² h];		
σ^* ,	Koeffizient Gleichung (43) [kcal/kg grad];		
ϕ ,	Dissipationsfunktion;		
ϕ_{12} ,	Hilfsfunktion Gleichung (51);		
ϕ_{21} ,	Hilfsfunktion Gleichung (52);		
$\chi(\eta)$,	Koeffizient Gleichung (39);		
ψ ,	Stromfunktion Gleichung (8);		
$\Omega(\eta)$,	Ähnlichkeitsparameter der Konzentrationsgl. Gleichung (9).		
Indizes			
0,	bezogen auf die Oberfläche;		

1. EINLEITUNG

FÜR DIE Behandlung der laminaren Grenzschichtgleichungen sind viele Verfahren vorgeschlagen worden. Die meisten befassen sich mit ähnlichen Lösungen. In neuerer Zeit sind aber auch allgemeine Lösungen behandelt worden, so von Wuest [1]. Meistens werden Ergebnisse für spezielle Fälle angegeben. Auch in dieser Arbeit wird ein Einzelproblem behandelt, nämlich die Grenzschicht über einer parallel angeströmten ebenen Platte, auf der sich ein Flüssigkeitsfilm befindet, der verdunstet. Es werden dabei ähnliche Lösungen angegeben für den Fall, dass das Verhältnis von Wärmeübergangszahl zur Stoffaustauschzahl (α/σ) [2, 3] konstant ist. Auf die weiteren Einschränkungen wird später hingewiesen.

Ausgangspunkt sind stets die Navier-Stokesschen Gleichungen, die man in ihrer vereinfachten Form auch als Prandtlische Grenzschichtgleichungen bezeichnet. Schlichting [4] beschränkt sich im wesentlichen in seiner umfassenden Grenzschichttheorie auf die Fälle der Strömungsgrenzschicht einschliesslich Ausblasen und Absaugen und der Temperaturgrenzschicht ohne Einfluss der Diffusion. Walz [5] behandelt zwar Strömungs- und Temperaturgrenzschichten, aber auch er befasst sich nicht mit Grenzschichten, bei denen Diffusion auftritt. Der Stoffübergang wurde u. a. von Hartnett und Eckert [6] für den Fall konstanter Stoffeigenschaften untersucht. Hierbei wurde angenommen, dass ein Gas mit gleichen Eigenschaften wie das strömende Medium aus der Oberfläche ausgeblasen wird. Eckert [7] gibt für zweidimensionale laminare Strömung für ein Zweistoffgasgemisch ein Differentialgleichungssystem an, bei dem er voraussetzt, dass die Stoffwerte ρ , η , D_{12} und c örtlich veränderlich sind. Grenzschichten mit Dampfbildung untersuchten Cess und Sparrow [8] am Modell einer heissen, durch Wasser angeström-

ten Platte. Bei ihnen ist der Ausdruck $\rho\lambda$ konstant, was zu einer wesentlichen Vereinfachung führt, ebenso wie die Annahme nach Chapman-Rubensin [9], dass $\rho\mu$ konstant angenommen werden kann. Lees [10] und Dorrance [11] behandeln Grenzschichten mit Wärme- und Stoffübergang einschliesslich chemischer Reaktionen, wobei sie sich besonders mit dem Fall einer Lewis-Zahl befassen, die nicht oder nur wenig von $Le = 1$ abweicht, so dass $q = -\lambda/c_p dh/dy$, ein Ausdruck, der sich sehr gut für die Behandlung von Wärmeübergang und Stoffaustausch bei chemischen Reaktionen benutzen lässt. Der Fall einer Grenzschicht mit Stoffaustausch und Verbrennung bei konstanten Stoffeigenschaften wurde unter vereinfachten Annahmen von Tze-Ning Chen und Tau-Yi Toong [12] behandelt, die davon ausgingen, dass die Verbrennung in einer unendlich dünnen Schicht stattfindet. Kays [13] und Luikov [14] geben Energiegleichungen an, bei denen sie in einem besonderen Term zusätzliche Wärmequellen und -senken berücksichtigen. Luikov erfasst mit diesem Glied die Wärmekapazität feiner Tröpfchen, die aus der Flüssigkeitsoberfläche herausgerissen werden und sich in der Grenzschicht befinden. In den meisten dieser oben angeführten Arbeiten und umfassenden Werke werden nur die Ausgangsgleichungen und Lösungen für Fälle angegeben, bei denen man mit konstanten Stoffeigenschaften rechnen kann oder bei denen man Mittelwerte benutzt. Über ein neues Berechnungsverfahren, das sich auch für turbulente Grenzschichten eignet, berichtet das Buch von Spalding und Patankar [15]. Hierbei wird ein Koordinatensystem eingeführt, das es ermöglicht, mit möglichst wenigen Punkten die Grenzschicht zu erfassen, daher auch die Bezeichnung "Bikini-Methode". Bei dem Verfahren der ähnlichen Lösungen wird davon ausgegangen, dass über der ganzen Länge x die gleichen Ähnlichkeitsbeziehungen für Strömungs-, Konzentrations- und Temperaturprofil bestehen. Wenn das nicht der Fall ist, so kann man nach Dewey, Jr. und Gross [16] eine

örtliche Ähnlichkeit einführen. Brown und Donoughe [17] berücksichtigen die veränderlichen Stoffeigenschaften für den Fall, dass es sich bei dem ausgeblasenen und dem strömenden Medium um den gleichen Stoff handelt.

In einer nicht veröffentlichten Arbeit schlug Fichtel [18] vor, die veränderlichen Stoffeigenschaften mit Hilfe der Beziehungen der kinetischen Gastheorie zu erfassen. Eine Lösung für die Energiegleichung brachte er jedoch nicht. Als Verbesserung schlug Ruiz-Urbieta [19] eine Methode zur Bestimmung der Temperaturgrenzschicht vor. Bei diesen beiden nicht veröffentlichten Arbeiten fehlt eine eindeutige Beziehung zwischen der Temperatur der ungestörten Gasströmung und der Temperatur an der Flüssigkeitsoberfläche. Diese Zusammenhänge zeigen jedoch Diagramme, die Hess [20] für konstante Stoffeigenschaften errechnete. Orth [21] berücksichtigt unter vereinfachenden Annahmen die veränderlichen Stoffeigenschaften und bringt ein Nomogramm, das den Zusammenhang zwischen Konzentration, Prandtl-Zahl, Schmidt-Zahl und der Temperatur im strömenden Gas und an der Flüssigkeitsoberfläche zeigt.

Der vorliegende Bericht berücksichtigt die veränderlichen Stoffwerte unter Benutzung von Tabellenwerten bzw. der daraus errechneten Ausgleichspolynome. Er bringt ferner Gleichungen zur Bestimmung des Temperaturverhältnisses T_∞/T_0 und zeigt, dass es für jedes Verhältnis nur eine Lösung gibt. Aber auch bei dieser Arbeit werden vereinfachende Annahmen getroffen.

2. ANNAHMEN FÜR DAS MODELL DER EBENEN PLATTE

Will man für das Problem des gekoppelten Wärmeübergangs und Stoffaustausches bei Verdunstung eines Flüssigkeitsfilms noch mit zumutbarem Aufwand lösbare Gleichungen erhalten, so muss man auch für den Fall der ebenen Platte vereinfachende Annahmen treffen. Deshalb gehen wir von folgendem Modell aus: Auf einer ebenen wärmeundurchlässigen Platte

mit der Wärmekapazität Null befindet sich ein gleichmässiger Flüssigkeitsfilm, der sich in Strömungsrichtung nicht fortbewegt und dem die Flüssigkeit durch die Plattenoberfläche zugeführt wird. Der Film ist stabil, d.h. es kommt an keiner Stelle zu einer von der Zeit abhängigen Änderung des Filmzustandes. Die Gasströmung über dem Film ist stationär. Ferner wird sich auf inkompressible Strömungen mit mässiger Geschwindigkeit beschränkt, so dass der Druckgradient dp/dx Null ist und man die Dissipation ϕ vernachlässigen kann. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass die Thermodiffusion gegenüber der molekularen Diffusion unbedeutend ist, was bei Temperaturen der Gasströmung unterhalb von 500°C angenommen werden kann. Weiter wird der Auftrieb nicht berücksichtigt und der entsprechende Term Null gesetzt. D.h. die vertikale ebene Platte ist bei sehr kleinen Anströmgeschwindigkeiten aus diesen Betrachtungen auszuschliessen.

3. GRUNDGLEICHUNGEN UND ÄHNLICHKEITSPARAMETER

Strömungs-, Konzentrations- und Temperaturgrenzschicht lassen sich unter den oben genannten Annahmen für den in Bild 1

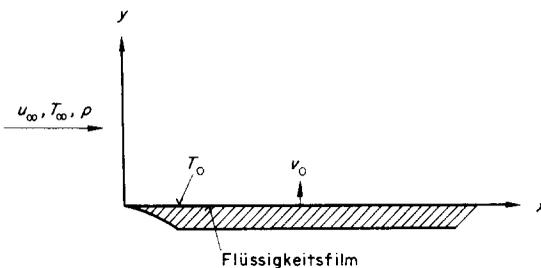


BILD 1. Modell der ebenen Platte mit Flüssigkeitsfilm.

schematisch dargestellten Modellfall durch folgende Gleichungen beschreiben:

Kontinuität:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Impuls:

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right). \tag{2}$$

Konzentrationskontinuität:

$$\rho u \frac{\partial c_1}{\partial x} + \rho v \frac{\partial c_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho D_{12} \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} \right) \right]. \tag{3}$$

Energie:

$$c_p \rho \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} [h_1 - h_2] \right) \rho D_{12} \frac{\partial c_1}{\partial y}. \tag{4}$$

Hier bedeuten: u, v Strömungsgeschwindigkeit in x - bzw. y -Richtung, ρ Gemischdichte, μ dynamische Zähigkeit des Gemisches, c_1 Konzentration des Stoffes 1 im Gemisch, c_p spezifische Wärme des Gemisches bei konstantem Druck, D_{12} molekularer Diffusionskoeffizient bei Diffusion des Stoffes 1 in den Stoff 2, λ Wärmeleitfähigkeit des Gemisches und h_1, h_2 Enthalpie des Stoffes 1 bzw. des Stoffes 2 ohne Berücksichtigung der Strömungsarbeit.

Zur Lösung dieses Differentialgleichungssystems stehen folgende 7 Randbedingungen zur Verfügung:

$$\left. \begin{array}{l} y=0: \\ \quad u=0 \quad v=v_0 \quad T=T_0 \quad c_1=c_{10} \\ y=\infty: \\ \quad u=u_\infty \quad T=T_\infty \quad c_1=c_{1\infty}=0 \end{array} \right\} \tag{5}$$

Die strenge Theorie erfordert jedoch, die Vorderkante der Platte von der Rechnung auszunehmen [4].

Durch Einführen von Ähnlichkeitsparametern werden diese partiellen Differentialgleichungen in gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt. In Anlehnung an Faulders [22] schlug Fichtel [18] folgende Ähnlichkeitsparameter vor:

$$\eta = \frac{z}{2} \sqrt{\left(\frac{u_\infty}{xv_\infty} \right)} \tag{6}$$

mit

$$z = \int_0^y \rho / \rho_\infty dy.$$

Führen wir jetzt eine Stromfunktion $\psi(x, y, t)$ in Kontinuitätsgleichung (1) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \rho u &= \rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \rho v &= -\rho_\infty \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (7)$$

so dass

$$\psi = \sqrt{(v_\infty \cdot x \cdot u_\infty)} f(\eta) \quad (8)$$

und

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} u_\infty f'(\eta) \\ v &= \frac{1}{2} \frac{\rho_\infty}{\rho} \sqrt{\left(\frac{v_\infty u_\infty}{x}\right)} [\eta f'(\eta) - f(\eta)]. \end{aligned}$$

Im folgenden wird vereinfachend für $f(\eta)$: f , $f'(\eta)$: f' usw. gesetzt. Ferner führen wir für die dimensionslose Konzentration den Parameter

$$\Omega(\eta) = \frac{c_1 - c_{10}}{c_{1\infty} - c_{10}} \quad (9)$$

und für die dimensionslose Temperatur den Parameter

$$\theta(\eta) = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0} \quad (10)$$

ein. Damit erhalten wir aus Gleichung (2)–(4) folgendes System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$ff'' + \frac{d}{d\eta} \left[\left(\frac{\rho\mu}{\rho_\infty\mu_\infty} \right) f'' \right] = 0, \quad (11)$$

$$f\Omega' + \frac{d}{d\eta} \left[\left(\frac{\rho\mu}{\rho_\infty\mu_\infty} \right) \frac{D_{12}}{v} \Omega' \right] = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &[c_{10}(1 - \Omega)(c_{p1}/c_{p2} - 1) + 1]f\theta' \\ &+ \frac{1}{c_{p2}} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{\rho\lambda}{\rho_\infty\mu_\infty} \theta' \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{d\eta} \left[(c_{p1}/c_{p2} - 1) \left(\theta + \frac{T_0}{T_\infty - T_0} \right) \right] \\ & \times \frac{D_{12}}{v} \frac{\rho\mu}{\rho_\infty\mu_\infty} c_{10} \Omega' = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \eta = 0: & \quad f = f_0 \quad f' = 0 \quad \Omega = 0 \quad \theta = 0 \\ \eta = \infty: & \quad f' = 2 \quad \Omega = 1 \quad \theta = 1, \end{aligned}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass c_{p2} unabhängig von der Temperatur konstant ist, was für Luft im interessierenden Temperaturbereich von 0 bis 500°C etwa erfüllt ist, und die Anströmgeschwindigkeit so klein ist, dass die entstehende Reibungswärme vernachlässigbar ist. Ferner wurde

$$h_2 - h_1 = Tc_{p2}(c_{p1}/c_{p2} - 1) \quad (14)$$

eingesetzt und c_p nach [23] aus

$$c_p = c_{p1}c_1 + c_{p2}c_2 \quad (15)$$

errechnet, worin $c_2 = 1 - c_1$, (16)

so dass

$$c_p = c_{p2}[c_1(c_{p1}/c_{p2} - 1) + 1]. \quad (17)$$

4. DER FALL KONSTANTER KOEFFIZIENTEN

Setzt man konstante Stoffeigenschaften voraus und nimmt an, dass sich die Gase bzw. Dämpfe ideal verhalten, so vereinfachen sich die Gleichungen (11)–(13). Setzt man nach Chapman–Rubesin [9]

$$\mu\rho = \mu_\infty\rho_\infty = \text{konst.}, \quad (18)$$

so erhält man aus der Impulsgleichung:

$$f''' + f'' \quad f = 0 \quad (19)$$

und unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{v}{D_{12}} = Sc = \text{konst.}, \quad (20)$$

also weder von y noch von x abhängt, als Konzentrationsgleichung

$$\Omega' + Sc \Omega' f = 0. \quad (21)$$

Nehmen wir ferner an, dass die Diffusion mit keinem Wärmetransport verbunden ist, so erhält man nach Einführung der Prandtl-Zahl,

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad (22)$$

wenn $c_{p1} = c_{p2} = \text{konst.}$, $Pr = Pr_1 = Pr_2 = \text{konst.}$ als Energiegleichung

$$\theta'' + Pr \theta' f = 0. \quad (23)$$

Das aber ist die bekannte Form der Energiegleichung für die ebene Platte mit Wärmeübergang. Die Randbedingungen für das System der Differentialgleichungen (19), (21) und (23) lauten

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad f_0 &= \frac{-2v_0\rho_0}{u_\infty\rho_\infty} \sqrt{(Re_x)} = \text{konst.} \\ f'_0 &= 0 \quad \Omega_0 = 0 \quad \theta_0 = 0 \\ \eta = \infty: \quad f'_\infty &= 2 \quad \Omega = 1 \quad \theta_\infty = 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Wenn man aus einer Platte ein gasförmiges Medium ausbläst, so ist der Mengenstrom des ausgeblasenen Gases unabhängig vom Wärmeübergang und kann in bestimmten Grenzen variiert werden. Damit erhalten wir aber auch für unendlich viele Werte von f_0 Lösungen. Für den Fall, dass das ausgeblasene Gas und das strömende Medium gleiche Eigenschaften haben, geben Hartnett und Eckert [6] Diagramme an, die den Einfluss des Ausblasparameters f_0 aufzeigen.

Bei der Verdunstung eines Flüssigkeitsfilms stellt sich jedoch, da der Stoffübergang mit dem Wärmeübergang gekoppelt ist, für jedes Temperaturverhältnis T_0/T_∞ ein einziger Wert von f_0 ein, wobei es für jede Gastemperatur T_∞ bei gegebener Zuflusstemperatur T_{zu} nur eine zugehörige Temperatur T_0 gibt.

Die Bestimmung des Wertes von f_0 erfordert die Kenntnis des Massenstromes des verdampfenden Stoffes 1

$$\dot{m}_{10} = \rho_0 v_0 = -\frac{1}{2} \rho_\infty u_\infty \frac{1}{\sqrt{(Re_x)}} f_0. \quad (25)$$

Der Dampfstrom lässt sich mit Hilfe des 1. Fickschen Gesetzes bestimmen:

$$\rho_0 v_0 = -\rho_0 \frac{D_{12}}{1 - c_{10}} \left(\frac{\partial c_1}{\partial y} \right)_0. \quad (26)$$

Setzt man den Parameter $\Omega(\eta)$ der dimensionslosen Konzentration ein und eliminiert $\rho_0 v_0$, so erhält man für die Randbedingung f_0 folgende Beziehung:

$$f_0 = \frac{1}{(Sc)_0} \frac{c_{1\infty} - c_{10}}{1 - c_{10}} \Omega'_0. \quad (27)$$

wobei die Annahme $c_{1\infty} = 0$ zulässig ist. Damit überhaupt ein Stoffübergang erfolgen kann, muss der Oberfläche des Flüssigkeitsfilms Energie durch Wärmeübergang zugeführt werden. Unter den getroffenen Annahmen muss die Wärme von der Aussenströmung übertragen werden. Da ausserdem die kinetische Energie der Strömung vernachlässigt werden kann, ergibt sich folgende Energiebilanz, bezogen auf den Mengenstrom je Einheitsfläche \dot{m} [6, 7]:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 (h''_{10} - h'_1) &= \alpha (T_\infty - T_0) \\ &+ q_r + \rho_0 v_0 (h''_{10} - h'_{20}), \end{aligned} \quad (28)$$

wobei h''_{10} die Enthalpie des abströmenden Dampfes, h'_1 die Enthalpie der zufließenden Flüssigkeit und h'_{20} die Enthalpie des strömenden Mediums und q_r die Wärme, die durch Strahlung auf den Film übertragen wird, sind. Da gilt

$$\dot{m}_{10} = \rho_0 v_0 = \dot{m}_1$$

und die Wärmeübergangszahl α wie folgt definiert ist

$$\alpha = \frac{\lambda}{T_\infty - T_0} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0; \quad (29)$$

lässt sich Gleichung (28), wenn man die Strahlungswärme q_r vernachlässigen kann, schreiben

$$\dot{m}_{10}(h''_{10} - h'_1) = \lambda_0 \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_0 + \dot{m}_{10}(T_0 - 273,15)(c_{p1} - c_{p2}). \quad (30)$$

Nach Einführung des Parameters $\theta(\eta)$ erhält man daraus den Dampfstrom

$$\dot{m}_{10} = \rho_0 v_0 = \frac{1}{2} \times \frac{\lambda_0 (T_\infty - T_0)}{(h''_{10} - h'_1) - (T_0 - 273,15)(c_{p1} - c_{p2})} \times \frac{\rho_0}{\rho_\infty} \sqrt{\left(\frac{u_\infty}{v_\infty x} \right)} \theta'_0. \quad (31)$$

Setzt man voraus, dass $\rho_\infty \mu_\infty = \rho_0 \mu_0 = \text{konst.}$ und substituiert obige Gleichung in f_0 , so ergibt sich

$$f_0 = - \frac{(T_\infty - T_0)}{(h''_{10} - h'_1) - (T_0 - 273,15)(c_{p1} - c_{p2})} \times \frac{c_{p0}}{Pr_0} \theta'_0. \quad (32)$$

Aus der Verbindung von Gleichung (32) mit Gleichung (27) erhält man eine Beziehung zur Bestimmung von T_∞ , wenn die Temperatur an der Filmoberfläche T_0 bekannt ist

$$T_\infty = \frac{c_{10}}{c_{20}} \times \frac{(h''_{10} - h'_1) - (T_0 - 273,15)(c_{p1} - c_{p2})}{c_{p0}} \times \frac{\Omega'_0}{\theta'_0} + T_0. \quad (33)$$

Für $Le = 1$ ist $\Omega'_0 = \theta'_0$. Vernachlässigt man ausserdem die Wärmeübertragung durch Diffusion, so ergibt sich:

$$T_\infty = \frac{c_{10}}{c_{20}} \cdot \frac{h''_{10} - h'_1}{c_{p0}} + T_0 \quad (34)$$

oder bei Benutzung der Partialdrücke anstelle der Konzentrationen

$$T_\infty = \frac{p_{10}/p}{1 - p_{10}/p} \cdot \frac{h''_{10} - h'_1}{c_{p0}} \cdot \frac{M_1}{M_2} + T_0. \quad (34a)$$

Will man die aus den Ähnlichkeitsbetrachtungen berechneten Ergebnisse mit gemessenen Werten vergleichen, so muss man wieder auf dimensionsbehaftete Parameter rücktransformieren.

Aus

$$dy = 2 \frac{\rho_\infty}{\rho} \sqrt{\left(\frac{v_\infty x}{u_\infty} \right)} d\eta \quad (35)$$

erhält man durch Integration

$$y = \frac{2}{\sqrt{(Re_x)}} x \int_0^\eta \frac{\rho_\infty}{\rho} d\eta. \quad (36)$$

Setzt man ideales Gasverhalten voraus, so gilt

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T} \cdot \frac{1}{c_1(M_2/M_1 - 1) + 1} \quad (37)$$

und nach Einführung der Parameter θ und Ω lässt sich die mit x dimensionslos gemachte Grenzschichtdicke aus Gleichung

$$\frac{\delta}{x} = \frac{2}{\sqrt{(Re_x)}} \cdot \int_0^\eta [T_0/T_\infty + (1 - T_0/T_\infty)\theta] \times [c_{10}(1 - \Omega)(M_2/M_1 - 1) + 1] d\eta \quad (38)$$

berechnen.

5. BERÜCKSICHTIGUNG VERÄNDERLICHER STOFFEIGENSCHAFTEN

Die Annahme, dass die Stoffeigenschaften des strömenden und des von der Plattenoberfläche aufsteigenden Mediums konstant oder sogar gleich sind, lässt sich für den allgemeinen Fall nicht aufrechterhalten, besonders wenn es sich um einen Verdampfungsvorgang handelt. Im folgenden wird nun beschrieben, wie sich die von Konzentration und Temperatur abhängigen Eigenschaften erfassen lassen. Das System, bestehend aus den Differentialgleichungen (11)–(13), enthält einige auf die Stoffeigenschaften bezogenen Grössen, die als Funktionen von η dargestellt werden müssen. Das sind:

$$\frac{\rho \mu}{\rho_\infty \mu_\infty} = \xi(\eta), \quad (39)$$

$$\frac{v}{D_{12}} = Sc, \quad (40)$$

$$\frac{\rho\mu}{\rho_\infty\mu_\infty} \cdot \frac{D_{12}}{v} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \cdot \frac{\lambda_2}{\mu_\infty} \cdot \frac{\rho}{\rho_2} \cdot \frac{1}{A} = \zeta(\eta), \quad (41)$$

$$\frac{\rho\lambda}{\rho_\infty\mu_\infty} = \zeta^*(\eta), \quad (42)$$

$$[c_{10}(1 - \Omega)(c_{p1}/c_{p2} - 1) + 1] c_{p2} = \sigma^*(\eta), \quad (43)$$

und

$$\left(\frac{c_{p1}}{c_{p2}} - 1\right) [(T_\infty - T_0)\theta + T_0] = \chi(\eta), \quad (44)$$

wobei

$$A = \frac{\lambda_2^-}{\rho_2 D_{12}} \quad (45)$$

das Austauschverhältnis, eine Grösse ist, die das Verhältnis von Wärmeübergang zur Verdunstungszahl für den laminaren Fall angibt. Kienzl [2] hat gezeigt, dass es für eine Anzahl von Stoffpaaren, z. B. Kohlenwasserstoffen-Luft, eine Konstante ist. Damit erhält man für das Differentialgleichungssystem folgende Form:

$$f''' + \frac{f + \zeta'}{\xi} f'' = 0, \quad (46)$$

$$\Omega' + \frac{f + \zeta'}{\xi} \Omega' = 0, \quad (47)$$

$$\theta'' + \frac{\sigma^* f + \zeta^* \theta'}{\zeta^*} \theta' = K_1 \frac{\zeta}{\zeta^*} \chi' \Omega' \quad (48)$$

mit

$$K_{1*} = \frac{c_{10} c_{p2}}{T_\infty - T_0}. \quad (49)$$

In den Koeffizienten treten Dichte ρ , dynamische Zähigkeit μ und Wärmeleitfähigkeit λ des Gemisches auf. Die Gemischdichte lässt sich mit Hilfe von Gleichung (37) berechnen. Nach [24] gilt für die Zähigkeit eines Gasgemisches:

$$\mu = \frac{\mu_1}{1 + x_2/x_1 \phi_{12}} + \frac{\mu_2}{1 + x_1/x_2 \phi_{21}} \quad (50)$$

mit

$$\phi_{12} = \frac{[(M_2/M_1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(\mu_1/\mu_2) + 1}]^2 (M_2/M_1)^{\frac{1}{2}}}{2(\sqrt{2})(1 + M_2/M_1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (51)$$

$$\phi_{21} = \phi_{12} \frac{1}{(\mu_1/\mu_2) M_2/M_1}, \quad (52)$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{c_1}{1 - c_1} \cdot \frac{M_2}{M_1} = \frac{(1 - \Omega) c_{10}}{1 - (1 - \Omega) c_{10}} \cdot \frac{M_2}{M_1} = f_1(\Omega) \frac{M_2}{M_1}. \quad (53)$$

Fasst man weiter zusammen

$$K_{12} = \frac{(M_2/M_1)^{\frac{1}{2}}}{2(\sqrt{2})(1 + M_2/M_1)^{\frac{1}{2}}}, \quad (54)$$

$$f(\theta) = \frac{[(M_2/M_1)^{\frac{1}{2}} \sqrt{(\mu_1/\mu_2) + 1}]^2}{\mu_1}, \quad (55)$$

$$f_{1*}(\theta) = \mu_\infty \cdot K_{12} \cdot f(\theta), \quad (56)$$

$$f_{2*}(\theta) = \frac{\mu_\infty}{\mu_1}, \quad (57)$$

$$f_{3*}(\theta) = \frac{\mu_\infty}{\mu_2}, \quad (58)$$

so erhält man für die dynamische Zähigkeit des Gemisches eine von η bzw. $\Omega(\eta)$ und $\theta(\eta)$ abhängige Funktion

$$\mu = f_{1*}(\Omega) \frac{1}{f_{1*}(\Omega) \cdot f_{2*}(\theta)/\mu_\infty + f_{1*}(\Omega)/\mu_\infty} + \frac{1}{f_{3*}(\theta)/\mu_\infty + f_{1*}(\Omega) \cdot f_{1*}(\theta) M_1/M_2 \cdot 1/\mu_\infty} \quad (59)$$

und für den Koeffizienten $\xi(\eta)$

$$\xi(\eta) = \frac{1}{[T_0/T_\infty + (1 - T_0/T_\infty)\theta]} \times \frac{1}{[(1 - \Omega) c_{10} (M_2/M_1 - 1) + 1]}$$

$$\times \left[\frac{M_2/M_1 \cdot f_1^*(\Omega)}{M_2/M_1 \cdot f_1^*(\Omega) \cdot f_2^*(\theta) + f_1^*(\theta)} + \frac{1}{f_3^*(\theta) + f_1^*(\Omega) f_1^*(\theta)} \right]. \quad (60)$$

Nach [24] lässt sich die Wärmeleitfähigkeit eines Gasgemisches aus

$$\lambda = \frac{1}{2}(\lambda_{sm} + \lambda_{rm}) \quad (61)$$

mit

$$\lambda_{sm} = x_1 \cdot \lambda_1 + x_2 \cdot \lambda_2 \quad (62)$$

$$\frac{1}{\lambda_{rm}} = \frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{x_2}{\lambda_2} \quad (63)$$

berechnen.

Da $x_1 + x_2 = 1$, lässt sich unter Benutzung von Gleichung (53) Gleichung (61) als Funktion von η schreiben und zusammenfassen, wenn man einführt

$$f_2^*(\Omega) = \frac{M_2/M_1(1 - \Omega) c_{10}}{(1 - \Omega) c_{10} M_2/M_1 + 1 - (1 - \Omega) c_{10}}, \quad (64)$$

$$f_4^*(\theta) = (\lambda_1/\lambda_2 - 1), \quad (65)$$

$$f_5^*(\theta) = (\lambda_2/\lambda_1 - 1), \quad (66)$$

$$\lambda = \frac{1}{2} \lambda_2 \left[f_2^*(\Omega) \cdot f_4^*(\theta) + 1 + \frac{1}{f_2^*(\Omega) \cdot f_5^*(\theta) + 1} \right]. \quad (67)$$

Damit lässt sich die Bestimmungsgleichung für den Koeffizienten $\zeta(\eta)$ wie folgt ausdrücken:

$$\zeta(\eta) = \frac{1}{\mu_\infty A \cdot g} \cdot \frac{\lambda_2(\theta)}{\left[\frac{T_0}{T_\infty} + \left(1 - \frac{T_0}{T_\infty} \right) \theta \right] \cdot [(1 - \Omega) c_{10} (M_2/M_1 - 1) + 1]^2} \quad (68)$$

Auf ähnliche Weise erhält man für den Koeffizienten $\zeta^*(\eta)$

$$\zeta^*(\eta) = \frac{1}{2\mu_\infty g} \cdot \frac{\lambda_2(\theta)}{\left[\frac{T_0}{T_\infty} + \left(1 - \frac{T_0}{T_\infty} \right) \theta \right] \cdot [(1 - \Omega) c_{10} (M_2/M_1 - 1) + 1]} \times \left[f_2^*(\Omega) f_4^*(\theta) + 1 + \frac{1}{f_2^*(\Omega) f_5^*(\theta) + 1} \right]. \quad (69)$$

und für $\chi(\eta)$

$$\chi(\eta) = T_\infty (c_{p1}/c_{p2} - 1) \times [(1 - T_0/T_\infty) \theta + T_0/T_\infty]. \quad (70)$$

Hierin sind die von θ abhängigen Größen λ_2 und $(c_{p1}/c_{p2} - 1)$ enthalten. Handelt es sich bei dem strömenden Medium um Luft, so lässt sich für den oben angegebenen Gültigkeitsbereich mit genügender Genauigkeit λ_2 als lineare Funktion von θ darstellen. Das gleiche gilt für $(c_{p1}/c_{p2} - 1)$.

Die Berücksichtigung nicht konstanter Eigenschaften bedeutet, dass zur Bestimmung der Randbedingung f_0 die Gleichung (32) nicht benutzt werden kann, sondern durch die Beziehung

$$f_0 = - \frac{(T_\infty - T_0)}{(h'_{10} - h'_1) + (T_0 - 273,15)(c_{p2} - c_{p1})} \times \frac{c_{p0}}{Pr_0} \xi_0 \cdot \theta'_0 \quad (71)$$

zu ersetzen ist. Für die Temperatur erhält man durch Verbindung mit Gleichung (27) und Einführung der Partialdrücke anstelle der Konzentrationen

$$T_\infty = \frac{p_{10}/p}{1 - p_{10}/p} \frac{M_1}{M_2} \times \frac{(h'_{10} - h'_1) + (T_0 - 273,15)(c_{p2} - c_{p1})}{c_{p0}} \times \left(\frac{Pr}{Sc} \right)_0 \frac{\Omega'_0}{\theta'_0} + T_0. \quad (72)$$

6. DIE LÖSUNG DER GRENZSCHICHTGLEICHUNGEN

Die Berechnung der Grenzschichten beginnt mit der Bestimmung der Temperatur T_∞ und der Randbedingung f_0 . Sind T_∞ und die Oberflächentemperatur T_0 bekannt, können die Koeffizienten ermittelt werden. Für den Fall konstanter Stoffeigenschaften bereitet die Lösung der Differentialgleichungen (19), (21) und (23) keine allzu grossen Schwierigkeiten. Allerdings lässt sie sich nicht in geschlossener Form darstellen. Jedoch stehen für die numerische oder analoge Lösung heute entsprechende elektronische Rechenanlagen zur Verfügung. Zur iterativen Lösung der Gleichung (19) haben schon Piercy und Preston (25) ein gut konvergierendes Verfahren vorgeschlagen, bei dem zunächst die Gleichungen integriert werden. Man erhält dadurch als Lösungsgleichung für die Strömung:

$$f(\eta) = f_0 + 2 \frac{\int_0^\eta \left\{ \int_0^\eta \exp \left[- \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] d\eta \right\} d\eta}{\int_0^\infty \exp \left[- \int_0^\eta f(\eta) d\eta \right] d\eta} \quad (73)$$

und für die Konzentration

$$\Omega(\eta) = \frac{\int_0^\eta \exp \left[- \int_0^\eta Sc f(\eta) d\eta \right] d\eta}{\int_0^\infty \exp \left[- \int_0^\eta Sc f(\eta) d\eta \right] d\eta} \quad (74)$$

Bei der Energiegleichung hat man in Gleichung (74) lediglich Sc durch Pr zu ersetzen.

Zur Lösung der Grenzschichtgleichungen bei nicht konstanten Stoffeigenschaften wurde bei dieser Arbeit eine Analogrechenanlage, bestehend aus EAI PACE 231 R und EAI PACE 580, benutzt. Ein numerisches Lösungsverfahren ist in Vorbereitung. Zunächst wurden, sofern für T_∞ keine gemessenen Werte vorlagen, f_0 und T_∞ nach den Gleichungen (32) bzw. (34) bestimmt. Sodann wurden die Funktionen $f_{1*}(\Omega)$, $f_{2*}(\Omega)$, $f_{1*}(\theta)$, $f_{2*}(\theta)$, $f_{3*}(\theta)$, $f_{4*}(\theta)$ und $f_{5*}(\theta)$ für den zutreffenden Konzentrations- und Tem-

peraturbereich mit Hilfe von Tabellenwerten oder entsprechenden Ausgleichspolynomen berechnet und in Funktionsgeneratoren eingegeben. Die Bestimmung von μ und λ mittels der Beziehungen der kinetischen Gastheorie für das Starrkugelmodell ist bei den hier interessierenden Stoffen, Luft und Kohlenwasserstoffdämpfen nicht möglich. Die Grössen $(c_{p1}/c_{p2} - 1)$ und λ_2 wurden als linear von θ abhängige Funktionen in die Rechnung einbezogen, was im untersuchten Bereich zulässig ist. Der Rechenvorgang wurde so lange wiederholt, bis die einzelnen Werte f_0 und T_∞ mit den aus Gleichungen (71) und (72) ermittelten übereinstimmten. Vorgegeben wurde immer die Temperatur an der Filmoberfläche T_0 .

7. ERGEBNISSE

Die Ergebnisse sollen an zwei Beispielen der Verdunstung eines Benzolfilms in Luft bei Oberflächentemperaturen von $T_0 = 293,15^\circ\text{K}$ und $T_0 = 313,15^\circ\text{K}$ diskutiert werden. Bild 2, 3 und 4 zeigen dafür die dimensionslosen Geschwindigkeits-, Konzentrations- und Temperaturprofile. Man erkennt den grossen Einfluss der Oberflächentemperatur T_0 , also letzten Endes der

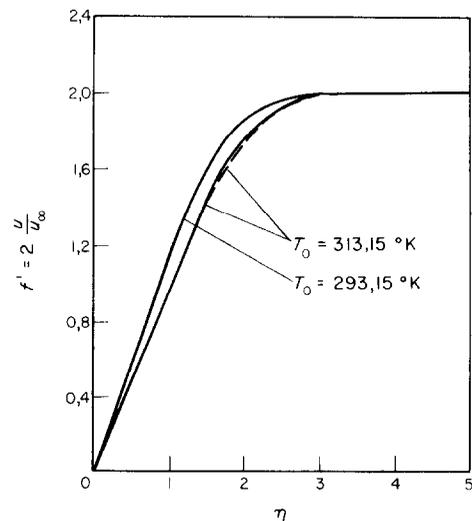


BILD 2. Dimensionsloses Geschwindigkeitsprofil der ebenen Platte bei Verdunstung von Benzol.

Gasttemperatur T_∞ . Steigt T_∞ an, so nehmen Impuls-, Konzentrations- und Temperaturgrenzschicht zu.

Zum Vergleich ist das Ergebnis einer Rechnung mit konstanten Stoffeigenschaften, bezogen auf die Anfangswerte von ξ, ζ, ζ^* nach Gleichungen (19), (21) und (23) gestrichelt eingezeichnet. Obwohl die Impulsgleichung noch sehr gut wiedergegeben wird, sind doch die Abweichungen bei der Konzentrations- und Energiegleichung beachtlich. Was den Diagrammen 2, 3 und 4 jedoch nicht zu entnehmen ist, ist die Tatsache, dass die Gradienten an der Filmoberfläche von Geschwindigkeit, Konzentration und Temperatur von denen bei Berücksichtigung veränderlicher Stoffeigenschaften stark differieren. Somit ergibt sich bei Rechnung

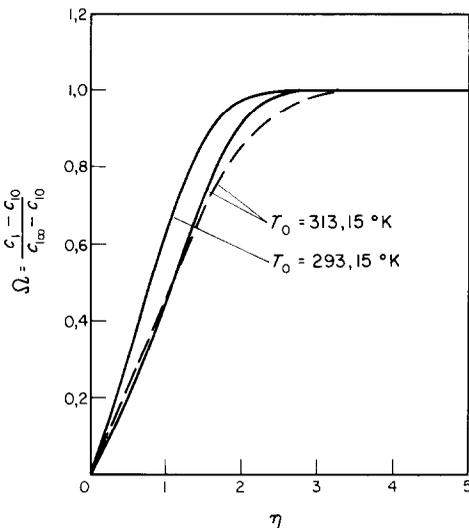


BILD 3. Dimensionsloses Konzentrationsprofil der ebenen Platte bei Verdunstung von Benzol.

mit konstanten Koeffizienten ein anderes Temperaturverhältnis T_0/T_∞ . Bild 5 zeigt die Abhängigkeit der Filmoberflächentemperatur T_0 von der Gasttemperatur T_∞ , bestimmt nach Spalding [26], Orth [21], nach dem Differentialgleichungssystem Gleichungen (46), (47), (48) sowie nach Messungen von Spletstösser und Schultz [27]. Die nach Gleichung (72) berech-

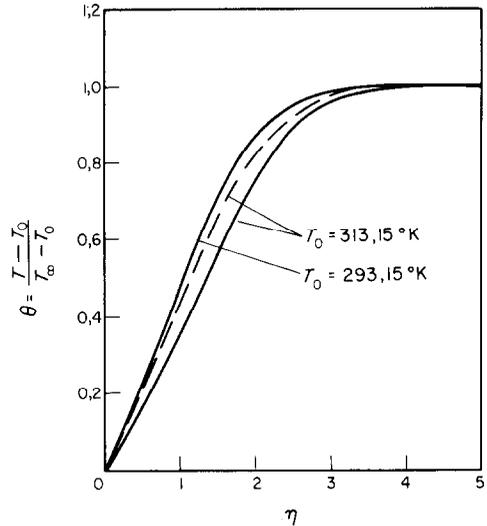


BILD 4. Dimensionsloses Temperaturprofil der ebenen Platte bei Verdunstung von Benzol.

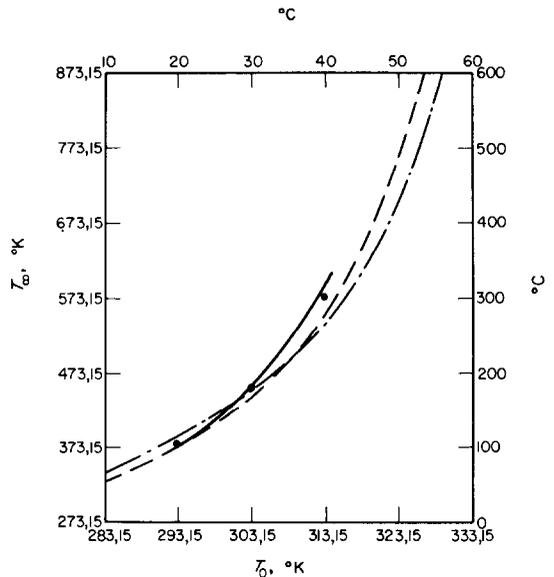


BILD 5. Abhängigkeit der Filmoberflächentemperatur T_0 von der Gasttemperatur T_∞ nach

- - D. B. Spalding [26]
- · - H. W. Orth [21]
- Gl. (72)

● Messwerte von W. Spletstösser u. K. J. Schultz [27].

neten Werte von T_∞ stimmen mit den Messwerten sehr gut überein. Gleiches gilt für den berechneten Verdampfungsmengenstrom

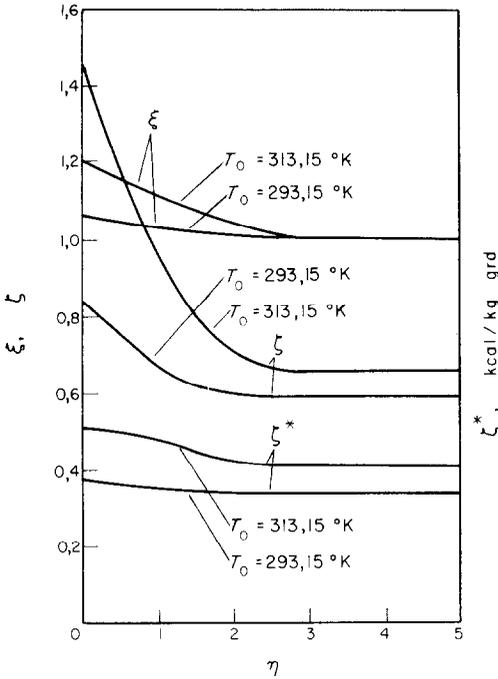


BILD 6. Abhängigkeit der Koeffizienten ξ, ζ, ζ^* von η bei Verdunstung von Benzol.

Reziprokwert der Sc -Zahl adäquat ist. Die Variation wird bei allen Koeffizienten mit zunehmender Temperatur T_∞ grösser. Die Funktion $\sigma(\eta)$ ist hier nicht dargestellt, da sie bei obigen Beispielen quasi konstant unabhängig von η ist. T_∞ beeinflusst ebenfalls Gleichung (38),

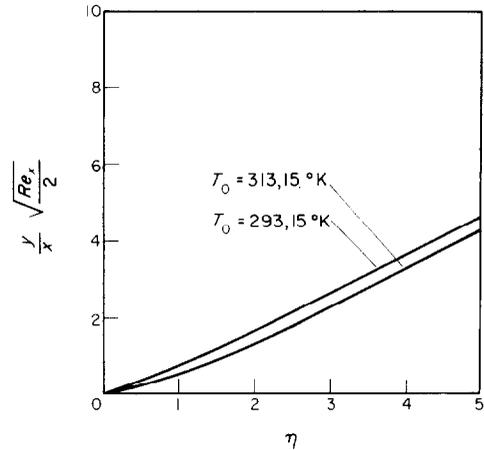


BILD 8. Abhängigkeit des Wertes $y/x \cdot \sqrt{Re_x}/2$ von y bei Verdunstung von Benzol.

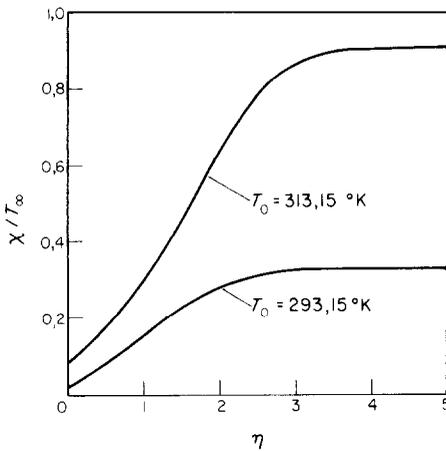


BILD 7. Abhängigkeit χ/T_∞ von η bei Verdunstung von Benzol.

\dot{m}_1 . Die Veränderlichkeit der Koeffizienten ξ, ζ, ζ^* zeigt Bild 6, während in Bild 7 die Abhängigkeit χ/T_∞ von η für obige Beispiele dargestellt ist. Die grösste Änderung tritt bei ζ auf, dessen

mit deren Hilfe man auf die dimensionsbehaftete Grenzschichtordinate y umrechnen kann. Diesen Zusammenhang zeigt Bild 8.

8. SCHLUSSBETRACHTUNGEN

Die Kenntnis der Vorgänge bei der Verdunstung eines Flüssigkeitsfilms, über den heisses Gas hinwegströmt, ist für Entwicklung von Filmverdampfungsbrennkammern von wesentlicher Bedeutung. Um eine Vorstellung über die Verhältnisse in der Grenzschicht über einem Kraftstoffilm, den Temperaturzustand und den Dampfmenstrom zu erhalten, wurde zunächst das Modell der ebenen Platte in laminarer Parallelströmung behandelt. Die Schwierigkeit lag dabei darin, dass die veränderlichen Stoffeigenschaften berücksichtigt werden müssen. Die Vereinfachung konstanter Koeffizienten in den Grenzschichtgleichungen ist in diesem Fall, wie die gerechneten Beispiele zeigen, nicht zulässig. Die oben aufgestellten

Gleichungen berücksichtigen deshalb die Temperatur- und Konzentrationsabhängigkeit der Stoffwerte. Die analytisch gewonnenen Ergebnisse stimmen gut mit Messwerten überein, was die Zulässigkeit der gemachten Annahmen bestätigt. Die Lösungen der Gleichungen liefern ausserdem Angaben über den Wärmeübergang und die Verdunstungsmengen, so dass es möglich ist, für die Anwendung in der Praxis Optimierungen vorzunehmen.

LITERATUR

1. W. WUEST, Wärmeübertragung in laminaren Überschallgrenzschichten mit Einblasen eines leichten Gases bei beliebigem Druck- und Temperaturverteilung, Jahrbuch 1965 der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt e.V. (WGLR) Herausgeber H. Blenk, 211–216. Friedr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig (1966).
2. K. KIENZLE, Zur Thermodynamik der Verdunstung von Flüssigkeiten, *Chemie.-Ing.-Tech.* **25**, 575–581 (1963).
3. E. KIRSCHBAUM, Neue Erkenntnisse über den Verdunstungsvorgang. *Chemie.-Ing.-Tech.* **21**, 89–91 (1949).
4. H. SCHLICHTING, Grenzschichttheorie. Braun, Karlsruhe (1965).
5. A. WALZ, *Strömungs- und Temperaturgrenzschichten*. Braun, Karlsruhe (1966).
6. J. P. HARTNETT, Mass-transfer cooling in a laminar boundary layer with constant fluid properties, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* **55A**, 108 (1965).
7. E. R. G. ECKERT, *Einführung in den Wärme- und Stoffaustausch*. Springer, Berlin (1966).
8. R. D. CESS and E. M. SPARROW, Film boiling in a forced-convection boundary layer flow, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs* **60**, WA-148 (1961).
9. D. R. CHAPMAN and M. W. RUBESIN, Temperature and velocity profiles in the compressible laminar boundary layer with arbitrary distribution of surface temperature, *J. Aeronaut. Sci.* **16**, 547–565 (1949).
10. L. LEES, Convective heat transfer with mass addition and chemical reactions, *Combustion and Propulsion.—Third Agard Colloquium* 1958, edited by M. W. THRING, O. LUTZ, J. FABRI and A. H. LEFÈBRE, pp. 451–498. Pergamon Press, Oxford (1958).
11. W. H. DORRANCE, *Viscous Hypersonic Flow*. McGraw-Hill, New York (1962).
12. TZE-NING CHEN and TAU-YI TOONG, Laminar boundary-layer wedge flows with evaporation and combustion, AIAA Heterogeneous Combustion Conference, Palm Beach, Florida, Preprint No. 63–499 (1963).
13. W. M. KAYS, *Convection Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill, New York (1966).
14. A. V. LUIKOV, Heat and mass transfer in capillary-porous bodies, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 1, edited by F. IRVINE JR. and J. P. HARTNETT, pp. 123–184. Academic Press, New York (1964).
15. D. B. SPALDING, S. V. PATANKAR, *Heat and Mass Transfer in Boundary Layers*. Morgan-Grampian, London (1967).
16. C. F. DEWEY JR. and J. F. GROSS, Exact similar solutions of the laminar boundary-layer equations, *Advances in Heat Transfer*, Vol. 4, edited by J. P. Hartnett, pp. 317–444. Academic Press, New York (1967).
17. W. B. BROWN, P. L. DONOUGHE, Tables of exact laminar boundary-layer solutions when the wall is porous and fluid properties are variable, NACA TN 2479 (1951).
18. C.-H. FICHEL, Der Einfluss der Luftbewegung auf die Ausbildung der Grenzschichten bei der Verdampfung eines Kraftstofffilms, Beschreibung der Methoden zur Erfassung des Problems, DFL-Hausbericht Nr. 0195, Braunschweig (1963) (nicht veröffentlicht).
19. M. RUIZ-URBIETA, Der Einfluss der Luftbewegung auf die Ausbildung der Grenzschichten bei der Verdampfung eines Kraftstofffilms, eine Methode zur Berechnung der Grenzschichten von siedenden Kraftstofffilmen, DFL-Hausbericht Nr. 0267, Braunschweig, (1964) (nicht veröffentlicht).
20. E. HESS, Die Berechnung der Grenzschicht und des Stoffaustausches bei laminarer Strömung für eine parallel angeströmte ebene Platte mit Verdampfung, DFL-Hausbericht Nr. 0304, Braunschweig (1965) (nicht veröffentlicht).
21. H.-W. ORTH, Die Berechnung von laminaren Zweistoffgrenzschichten mit gekoppeltem Wärme- und Stoffübergang bei Verdunstung eines Flüssigkeitsfilms auf einer parallel angeströmten ebenen Platte, Vergleich von Rechenverfahren, DLR-Forschungsber., FB 69–33, München (1969).
22. C. R. FAULDERS, Heat transfer in the laminar boundary layer with ablation of a vapor of arbitrary molecular weight, *J. Aero/Space Sci.* **29**, 76–86 (1962).
23. F. BOŠNJAKOVIĆ, *Technische Thermodynamik* II. Teil. Steinkopff, Leipzig (1965).
24. W. M. ROHSENOW and H. CHOI, *Heat, Mass and Momentum Transfer*. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1961).
25. N. A. V. PIERCY and G. H. PRESTON, A simple solution of the flat plate problem of skin friction and heat transfer, *Phil. Mag.* **21** (7), 995–1005 (1936).
26. D. B. SPALDING, *Convective Mass Transfer*. Edward Arnold, London (1963).
27. W. SPLETTSTÖSSER and K.-J. SCHULTZ, Untersuchung des Stoffübergangs an einer ebenen ruhenden Flüssigkeitsoberfläche bei paralleler Anströmung und laminarer Grenzschicht, DLR-Forschungsber. FB 70–58, München (1970).

THE CALCULATION OF BOUNDARY LAYERS FOR SIMULTANEOUS HEAT AND MASS TRANSFER IN AN EVAPORATING LIQUID LAYER ON A FLAT PLATE IN PARALLEL FLOW WITH TEMPERATURE DEPENDENT PROPERTIES

Abstract—For a parallel flow along a flat plate having a thin fluid film the equations of the momentum, concentration and energy of the boundary layer for laminar flow are given. The method of similar solutions is used. Following assumptions are made: The plate is heat insulated, the gas temperature is so low that the thermodiffusion can be neglected, and the flow velocity is so low that the dissipation is unimportant. The investigations are restricted on the evaporization of substances for which the ratio (α/σ) of heat transfer coefficient to evaporization coefficient is constant. At first, the case of constant properties of substances is treated. Then, the variable values of substances are considered and the equations for the properties of mixture are given starting from the tabulated values or corresponding polynomials of least error for pure substances. By means of an example it is shown to what extent the results with variable thermodynamic and transport properties differ from those with constant properties. Finally, the dependency of T_0 on the temperature T_∞ determined according to the given equations is compared with values calculated by other methods and with experimental results.

LE CALCUL DES COUCHES LIMITES A PROPRIETES DEPENDANTES DE LA TEMPERATURE POUR DES TRANSFERTS SIMULTANES DE CHALEUR ET DE MASSE DANS UNE COUCHE LIQUIDE S'EVAPORANT SUR UNE PLAQUE PLANE SANS INCIDENCE

Résumé—Pour une plaque avec un film mince de liquide qui évapore dans un écoulement parallèle les équations de la couche limite laminaire pour la vitesse, la concentration et l'énergie sont données. Dans les équations la méthode des solutions analogues est utilisée. Il est supposé que la plaque est imperméable pour la chaleur, la température de gaz est si basse que la thermodiffusion est négligeable, la vitesse d'écoulement est si petite que la dissipation est sans importance. En plus on se limite à l'évaporation des substances pour qui le rapport (α/ρ) du coefficient de transfert de la chaleur au coefficient d'évaporation est constant. Le cas des propriétés constantes est traité au début, puis le cas des propriétés variables et les équations pour les propriétés du mélange sont données. Des valeurs de tables ou des polynômes d'approximation pour des substances pures sont utilisés. Un exemple montre les résultats différents pour les propriétés variables et les propriétés constantes. Enfin la dépendance de la température T_0 de T_∞ trouvé par les équations données dans cette publication est comparée avec des valeurs calculé par d'autres méthodes et avec des résultats des expériences.

РАСЧЁТ ХАРАКТЕРИСТИК СОВМЕСТНОГО ТЕПЛО-И МАССООБМЕНА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ НА ПРОДОЛЬНО — ОБТЕКАЕМОЙ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЕ В СРЕДЕ СО СВОЙСТВАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Аннотация—Выполнено аналитическое исследование совместного тепло-и массообмена продольнообтекаемой плоской пластины, поверхность которой покрыта тонкой пленкой жидкости. Анализ базируется на системе уравнений количества движения, концентрации и энергии для ламинарного пограничного слоя. Используется метод автомодельных решений и принимаются следующие допущения: пластина теплоизолирована, температура газа достаточно низка, так что термодиффузией можно пренебречь, диссипация механической энергии незначительна. Исследования ограничены испарением веществ, для которых справедливо постоянство отношения коэффициента теплообмена к коэффициенту испарения (α/τ) . Сначала рассматривается случай постоянных физических свойств. Затем ищется решение для переменных свойств и приводятся уравнения для свойств смеси, исходя из табулированных значений или соответствующих полиномиальных аппроксимаций для чистых веществ. Приведен пример для иллюстрации того, насколько результаты по переменным термодинамическим и переносным свойствам отличаются от результатов по постоянным свойствам. Наконец, зависимость T_0 от температуры T_∞ , определяемой по данным уравнениям, сравнивается со значениями, рассчитанными другими методами, а также с экспериментальными данными.